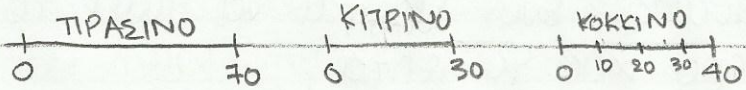
Η ΑΓΙΑ ΤΕΤΡΑΔΑ !!! ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1) Ένας φωτεινός σηματοδότης είναι κόκκινος για 40 δεύτερα κίτρινος για 30 δεύτερα και πράσινος για 70 δεύτερα

α. Ένα αυτοκίνητο φθάνει στο σηματοδότη. Ποια η πιθανότητα να περιμένει έλεi το πολύ 10 δεύτερα;

β. Αν παρακολουθήσουμε το χρόνο που περιμένουν στο σηματοδότη 8 αυτοκίνητα τα οποία φθάνουν το ένα από το άλλο ανεξάρτητα σε αυτόν, ποιά η πιθανότητα ακριβώς τρία εξ αυτών να περιμένουν το πολύ 10 δεύτερα;

ΛΥΣΗ



α. Για να περιμένει το πολύ ένα αυτοκίνητο 10 sec θα πρέπει να φθάσει στο σηματοδότη στο διάστημα [30 − 40] το οποίο έχει ίση πιθανότητα με τα υπόλοιπα υποδιαστήματα μήκους 10 sec, του αρχικού διαστήματος [0 − 40]. Προφανώς, η τ.μ. X που παριστά τη χρονική στιγμή που το αμάξι φθάνει στο σηματοδότη, ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή ($X \sim U(0,40)$) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \frac{1}{40-0} = \frac{1}{40}, \quad 0 < x < 40$$

Άρα, $P(30 \leq X \leq 40) = \int_{30}^{40} \frac{1}{40} dx = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

β. Έχουμε, $n = 8$ αυτοκίνητα ανεξάρτητα το ένα από το άλλο με πιθανότητα να περιμένουν το πολύ 10 sec:

$P(E) = 0{,}25$ όπου $E = \{$να περιμένει το πολύ 10 sec$\}$

Και X τ.μ. που παριστά το πλήθος αμαξιών που περιμένουν το πολύ 10 sec. ($X \sim B(n=8, P(E) = 0.25)$)

$$P(x=3) = p_x(3) = \binom{8}{3} \cdot (0.25)^3 \cdot (0.75)^5 =$$

$$= \frac{8!}{3!\,5!} \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \frac{3^5}{4^5} = \frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}}{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{243}{1024} =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{243}{1024} = 0,2076$$

2) Υποθέτουμε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να λύσει ένας μαθητής ένα δύσκολο θέμα εξετάσεων στα μαθηματικά περιγράφεται από κανονική κατανομή με $\mu = 60$ και $S = 15$ λεπτά.

α) Ποια η πιθανότητα ενός μαθητή να λύσει το θέμα:

i) σε λιγότερο από 90 λεπτά;

ii) σε χρόνο περ/ρο από 75 λεπτά;

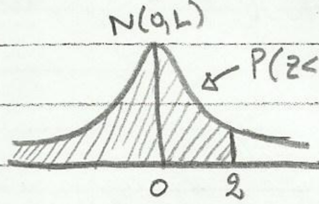
iii) μεταξύ 75 και 95,7 λεπτών;

β) Αν στις εξετάσεις συμμετέχουν 10 μαθητές, ποια η πιθανότητα να λύσουν το θέμα σε χρόνο μεταξύ 75 & 95,7 λεπτών;

ΛΥΣΗ

α) Έστω X ο χρόνος που απαιτείται για να λυθεί μια άσκηση

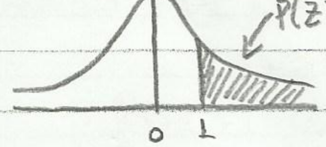
i) $P(X<90) = P\left(\frac{X-60}{15} < \frac{90-60}{15}\right) = P(Z<2) =$



$= P(0<Z<2) + P(0<Z<\infty) =$

$= 0,4772 + 0,5000 = 0,9772$

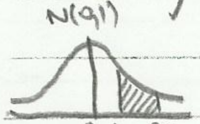
ii) $P(X>75) = P\left(\frac{X-60}{15} > \frac{75-60}{15}\right) = P(Z>1) =$



$= P(0<Z<\infty) - P(0<Z<1) =$

$= 0,5000 - 0,3413 = 0,1587$

iii) $P(75<x<97,5) = P\left(\frac{75-60}{15} < Z < \frac{97,5-60}{15}\right) =$



$= P(1<Z<2,5) =$

$= P(0<Z<2,5) - P(0<Z<1) = 0,4938 - 0,3413 =$

$= 0,1525.$

β) Εχουμε, συμμετοχη 10 μαθητων με $P(E)=0,1525$
οπου $E=\{$να λυθεί το θεμα σε χρονο $75-95,7\}$
Ενώ εστω $Y=$ ο αριθμος μαθητών που θα λυσει το θεμα
σε χρονο $75-95,7$ λεπτά
$Y \sim B(10,\ 0{,}1525)$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$

$$= 1 - \binom{10}{0} \cdot (0{,}1525)^0 \cdot (1-0{,}1525)^{10} - \binom{10}{1} \cdot (0{,}1525)^1 \cdot (1-0{,}1525)^9 =$$

....

3) Υποψήφιοι για πρόσληψη σε μια θέση, φτάνουν για την προβλεπόμενη συνέντευξη στην επιτροπή με ρυθμό 10 υποψήφιοι ανά ώρα.
α) Ποια η πιθανοτητα σε μισή ώρα να φθάσουν το πολύ τρεις υποψήφιοι στο ραντεβου;
β) Ο προθάλαμος στον οποίο οι υποψηφιοι περιμένουν τη σειρά τους για την συνέντευξη έχει έξι καθίσματα, ενώ ο χρόνος που διαρκεί η συνέντευξη είναι 10 λεπτά. Να υπολογιστεί η πιθανοτητα, κατά τη στιγμή που τελιώνει η συνέντευξη του $1^{ου}$ υποψηφίου να υπάρχουν τουλάχιστον 4 όρθιοι στον προθάλαμο
γ) Ποια η πιθανοτητα ο χρόνος μεταξύ 2 διαδοχικών υποψηφίων να είναι μικρότερος απο 2 λεπτά;

ΛΥΣΗ

α) Εστω X το πλήθος των υποψηφίων που φθάνουν σε $\frac{1}{2}$ ώρας
$X \sim P(\lambda=5)$ διοτί 10 υποψήφιοι $\to$ 1 ωρα άρα σε $\frac{1}{2}$ ωρας 5 υποψ.

$$P_X(X \leq 3) = \sum_{x \leq 3} \frac{e^{-5} \cdot 5^x}{x!} = \frac{e^{-5} \cdot 5^3}{3!} + \frac{e^{-5} \cdot 5^2}{2!} + \frac{e^{-5} \cdot 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} \cdot 5^0}{0!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 75}{6 \cdot e^5} + \frac{1 \cdot 25}{2 \cdot e^5} + \frac{1 \cdot 5}{e^5} + \frac{1}{e^5} = \ldots = \frac{186}{6e^5}$$

β) Για να υπάρχουν τουλάχιστον 4 όρθιοι προφανώς οι άλλες 6 είναι πιασμένες. Αρα, συνολο 10 υποψηφιοι

περιμένουν στον προθάλαμο όσο διαρκεί η συνέντευξη του $1^{ου}$
Έστω $Y \equiv$ πλήθος υποψηφίων στα 10 λεπτά που περιμένουν
Έστω μονάδα χρόνου τα 10 λεπτά

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ ώρα} = 60 \text{ λεπτά} \longrightarrow 10 \text{ υποψήφιοι} \\ 10 \text{ λεπτά} \longrightarrow \lambda \text{ υποψήφιοι} \end{array}\right| \Rightarrow \lambda = \frac{10}{6}$$

$Y \sim P(\lambda = \frac{10}{6})$

$$P(Y \geq 10) = 1 - P(Y < 10) = 1 - \sum_{Y=0}^{9} \frac{e^{-10/6} \cdot (10/6)^x}{x!} = \ldots$$

γ) Έστω $Z \equiv$ χρόνος μεταξύ 2 διαδοχικών υποψηφίων
$Z \sim \text{Εκθ}(\lambda = \frac{1}{6})$ διότι αν έχω μονάδα χρόνου το 1 λεπτό τότε, λέμε:

$$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ λεπτά} \longrightarrow 10 \text{ υποψήφιοι} \\ 1 \text{ λεπτό} \longrightarrow \lambda \quad -//- \end{array}\right| \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

Και ζητάμε:

$$P(Z<2) = \int_0^2 \frac{1}{6} \cdot e^{-\frac{1}{6}x}\, dx = -\left[e^{-1/6x}\right]_0^2 = -e^{-1/3} + e^0 = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

ή

$$P(Z<2) = F_X(2) = 1 - e^{-1/3} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

4) Έστω ότι έχουμε 2 κιβώτια K_1 & K_2. Το K_1 περιέχει 3 μαύρες & 2 άσπρες μπάλες, ενώ το K_2 περιέχει 1 μαύρη & 3 άσπρες μπάλες. Ρίχνουμε ένα ζάρι. Αν το αποτέλεσμα του είναι ≥ 3 παίρνουμε τυχαία μια μπάλα από το K_2 ενώ αν είναι <3 τότε παίρνουμε τυχαία μια μπάλα από το K_1. Να βρείτε την πιθανότητα
(α) η μπάλα να είναι μαύρη
(β) δεδομένου ότι η μπάλα είναι μαύρη, να προέρχεται από το κιβώτιο 1 (K_1)

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$K_1 = \{$να επιλέξουμε το κιβώτιο 1$\}$

$K_2 = \{$να επιλέξουμε το κιβώτιο 2$\}$

$M = \{$να επιλεγεί μαύρη$\}$

$A = \{$να επιλεγεί άσπρη$\}$

α)

$P(K_1) = P(\{\text{ένδειξη} < 3\}) = \frac{1}{3}$ & $P(K_2) = P(\{\text{ένδειξη} \geq 3\}) = \frac{2}{3}$.

$$P(M \mid K_1) = \frac{P(M \cap K_1)}{P(K_1)} \overset{\text{Ανεξάρτητα}}{=} \frac{P(M)\cdot \cancel{P(K_1)}}{\cancel{P(K_1)}} = \frac{3}{5}$$

&

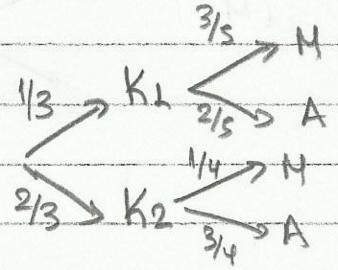
$$P(M \mid K_2) = \frac{P(M \cap K_2)}{P(K_2)} \overset{\text{Ανεξάρτητα}}{=} \frac{P(M)\cdot \cancel{P(K_2)}}{\cancel{P(K_2)}} = \frac{1}{4}$$

Από Θεωρ. ολικής πιθανότητας

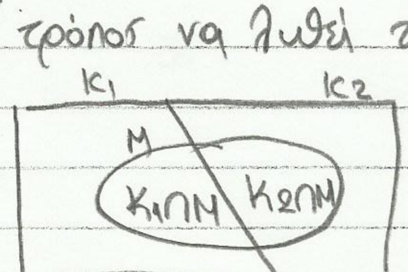
$$P(M) = P(M \mid K_1)\cdot P(K_1) + P(M \mid K_2)\cdot P(K_2) = \frac{11}{30}$$

β) $$P(K_1 / M) = \frac{P(K_1 \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M \mid K_1)\cdot P(K_1)}{P(M)} = \frac{1/3 \cdot 3/5}{11/30} = \frac{6}{11}$$

ΓΕΝΙΚΑ ΧΡΗΣΙΜΟ ΑΛΛΑ ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΔΕΝΤΡΟ



β' τρόπος να λυθεί το (α).



$M = (K_1 \cap M) \cup (K_2 \cap M)$

όπου τα $K_1 \cap M$ & $K_2 \cap M$ ασυμβίβαστα.

Άρα, $P(M) = P(K_1 \cap M) + P(K_2 \cap M) =$

$= P(K_1)\cdot P(M / K_1) + P(K_2)\, P(M / K_2) = \frac{11}{30}$